Topología II
Examen XI

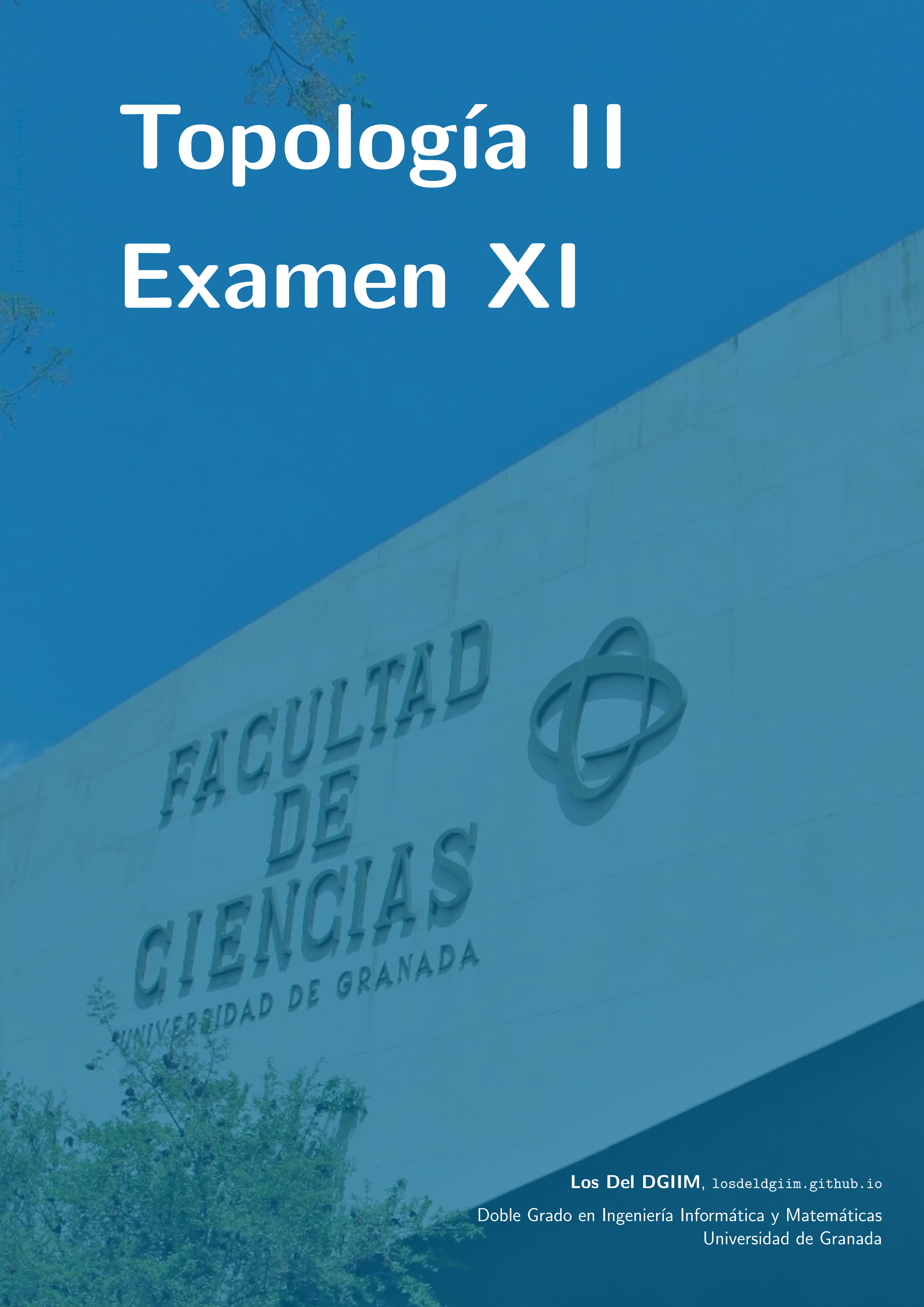

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen XI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2025/26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 6 de febrero de 2026.

Duración 2 horas y media.

Responde a cuatro de las siguientes seis preguntas.

Ejercicio 1. Demuestra que no existe una aplicación continua e inyectiva desde la esfera $\mathbb{S}^2$ en el toro T.

Ejercicio 2. Demuestra que el toro T menos un punto no es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$ menos un punto.

Ejercicio 3. Consideremos la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r\}$$

con $r > 0$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua tal que $f\big|_{C_r} : C_r \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ no es homotópicamente nula, demuestra que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0) = (0,0)$.

Ejercicio 4. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^n$ con $n \geqslant 2$ y $p : \mathbb{S}^n \to B$ una aplicación recubridora sobre un espacio topológico B. Demuestra que $\pi_1(B, b)$ es finito para cada $b \in B$.

Ejercicio 5. Sean R y B dos espacios topológicos donde B es un espacio métrico compacto. Demuestra que si $p : R \to B$ es una aplicación recubridora donde cada punto $b \in B$ tiene el mismo número finito de preimágenes $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces R es compacto.

Ejercicio 6. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal.

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l; ag^{-1}e, kb^{-1}f^{-1}, h^{-1}fc, kai^{-1}, jc^{-1}l^{-1}, bi^{-1}g, jd^{-1}h^{-1}, edl^{-1} \rangle$$

Solución.

Ejercicio 1. Demuestra que no existe una aplicación continua e inyectiva desde la esfera $\mathbb{S}^2$ en el toro T.

Por reducción al absurdo, supuesto que existe una aplicación $f : \mathbb{S}^2 \to T$ continua e inyectiva, consideramos una aplicación recubridora $p : \mathbb{R}^2 \to T$ (que puede ser por ejemplo $p = p_0 \times p_0$ donde p_0 es la aplicación recubridora estándar de $\mathbb{S}^1$). Fijado $x_0 \in \mathbb{S}^2$, $y_0 = f(x_0)$ y tomando $r_0 \in p^{-1}(y_0)$ tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0)$ es trivial, con lo que la aplicación f se puede levantar a una aplicación continua $\hat{f} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$. Por el Teorema de Borsuk-Ulam tenemos que existe $z_0 \in \mathbb{S}^2$ de forma que:

$$\hat{f}(z_0) = \hat{f}(-z_0)$$

Por lo que tenemos que:

$$f(z_0) = p(\hat{f}(z_0)) = p(\hat{f}(-z_0)) = f(-z_0)$$

con $z_0 \neq -z_0$, hemos llegado a una contradicción con la condición de que f es inyectiva.

Ejercicio 2. Demuestra que el toro T menos un punto no es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$ menos un punto.

Ejercicio 3. Consideremos la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$C_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r\}$$

con $r > 0$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua tal que $f\big|_{C_r} : C_r \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es homotópicamente nula, demuestra que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0) = (0,0)$.

Ejercicio 4. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^n$ con $n \geqslant 2$ y $p : \mathbb{S}^n \to B$ una aplicación recubridora sobre un espacio topológico B. Demuestra que $\pi_1(B, b)$ es finito para cada $b \in B$.

Ejercicio 5. Sean R y B dos espacios topológicos donde B es un espacio métrico compacto. Demuestra que si $p : R \to B$ es una aplicación recubridora donde cada punto $b \in B$ tiene el mismo número finito de preimágenes $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces R es compacto.

Ejercicio 6. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal.

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l; ag^{-1}e, kb^{-1}f^{-1}, h^{-1}fc, kai^{-1}, jc^{-1}l^{-1}, bi^{-1}g, jd^{-1}h^{-1}, edl^{-1}\rangle$$